

M. G. Angeli - F. Mannocchi - G. Vitillaro

**ESAURIMENTO DI FALDE DRENATE: PROVE SPERIMENTALI
E RISULTATI NUMERICI**

Estratto da:

**ANNALI DELLA FACOLTÀ DI AGRARIA
VOLUME XXXV - 1981**

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PERUGIA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
ISTITUTO DI IDRAULICA AGRARIA
DIRETTORE: PROF. ING. ZENO STOPPINI

M.G. ANGELI, F. MANNOCCHI e G. VITILLARO

ESAURIMENTO DI FALDE DRENATE: PROVE SPERIMENTALI
E RISULTATI NUMERICI

ANNALI DELLA FACOLTÀ DI AGRARIA
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PERUGIA
VOLUME XXXV - 1981

ESAURIMENTO DI FALDE DRENATE: PROVE SPERIMENTALI E RISULTATI NUMERICI

M.G. ANGELI (*), F. MANNOCCI (**) e G. VITILLARO (***)

1. INTRODUZIONE

L'esaurimento di una falda drenata, assumendo valida l'ipotesi di Dupuit, è governata da una equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine della forma:

$$\frac{s}{k} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (17)$$

con t , variabile temporale; x , variabile spaziale; h , altezza della falda (fig. 1); s , porosità effettiva, e k , permeabilità del mezzo.

La (1) si ricava considerando: il moto piano; la velocità costante lungo ogni verticale; il mezzo saturo, isotropo ed omogeneo; k ed s costanti nel tempo; l'apporto esterno alla falda uguale a zero.

Le condizioni iniziali ed al contorno (fig. 1) vengono assunte di solito uguali a:

$$\begin{aligned} - h(0,t) &= h(2L,t) = d & \forall t > 0 \\ - h(x,0) &= h_0(x), \text{ funzione nota} \\ - \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=L} &= 0, & \forall t > 0 \end{aligned}$$

La risoluzione della (1) permette di conoscere la variazione nel tempo e nello spazio dell'altezza della superficie libera della falda. Una soluzione della (1) è stata ottenuta nel caso particolare in cui si verifichi

(*) C.N.R. Istituto di Ricerca per la Protezione Idrogeologica nell'Italia Centrale

(**) Istituto di Idraulica Agraria dell'Università degli Studi di Perugia

(***) Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Perugia

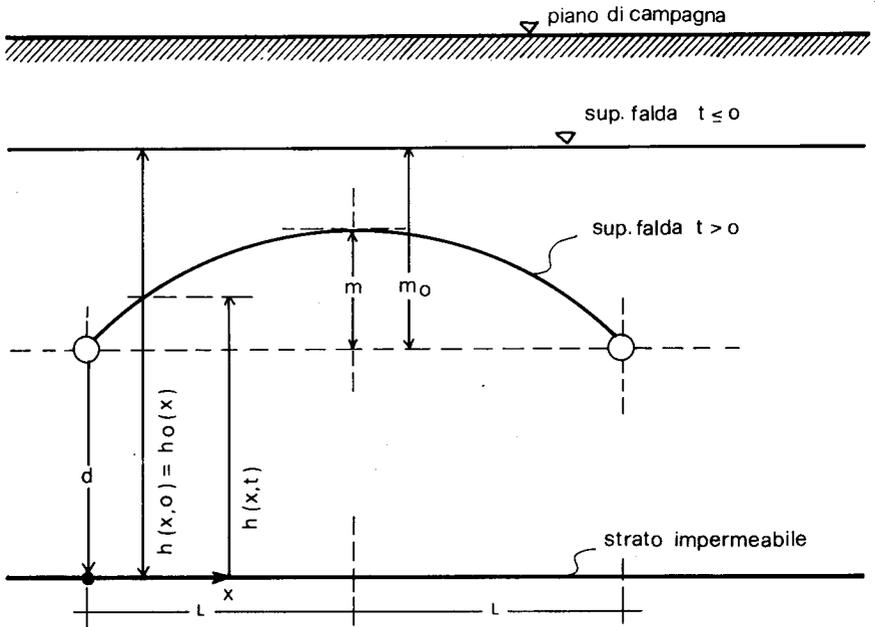


Fig. 1 — Schema in sezione di un impianto di drenaggio: definizione delle grandezze.
— Symbols used in falling water table analysis.

la condizione $h(0,t) = h(2L,t) = 0$ e cioè nel caso in cui i dreni poggino sul piano impermeabile di base. Si è infatti ipotizzata per la $h(x,t)$ una soluzione del tipo $X(x) \cdot T(t)$, prodotto di due funzioni ciascuna dipendente da una sola variabile; il che comporta che tutti i profili della superficie di falda siano rappresentati da curve affini.

Un integrale particolare della (1) viene quindi ad essere rappresentato dalla

$$h(x,t) = \frac{h(x,0)}{1 + 1,115 \frac{kh(L,0)t}{sL^2}} \quad (2)$$

La Polubarinova -Kotchina [8] ha fornito una comoda rappresentazione grafica di una funzione $\phi(x/L)$ tale che $\phi(x/L) \cdot h(L,0) = h(x,0)$, per cui sostituendo nella (2) si ha

$$h(x,t) = h(L,0) \frac{\phi\left(\frac{x}{L}\right)}{1 + 1,115 \frac{kh(L,0)t}{sL^2}} \quad (2')$$

che presuppone all'istante iniziale un parziale esaurimento della falda.

Più recentemente [12] per giungere ad una soluzione approssimata della (1) è stato utilizzato un procedimento numerico, dotato di buone proprietà di convergenza e stabilità, prodotto da Douglas e Jones, noto come "predictor-corrector", che si riassume brevemente. La (1), posto $H = h/L$, $X = x/L$ e $\tau = kt/sL$, si può scrivere nella forma adimensionale:

$$\frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial X} \left(H \frac{\partial H}{\partial X} \right)$$

cui vanno associate le seguenti condizioni:

$$- H(X, 0) = \frac{h(x, 0)}{L} = \frac{h_0(x)}{L}$$

$$- H(0, \tau) = H(1, \tau) = 0$$

$$- \left. \frac{\partial H}{\partial X} \right|_{X=1} = 0$$

Suddiviso l'intervallo $0 \leq X \leq 1$ in p parti di ampiezza Δx e l'insieme di variabilità I della τ in intervalli $\Delta \tau$, con Δx e $\Delta \tau$ scelti di grandezza opportuna, il metodo suddetto fornisce due sistemi (predittori e correttori) di p equazioni in p incognite, i quali, indicato con $W_{i,j}$ il valore approssimato di $H_{i,j}$, possono essere scritti nella seguente forma:

Predittori

$$\begin{aligned} W_{i+1, j+1/2} - \left[2 + \frac{2(\Delta x)^2}{W_{i,j} \Delta \tau} \right] W_{i, j+1/2} + W_{i-1, j+1/2} = \\ = \frac{(\Delta x)^2}{W_{i,j}} \left(- \frac{2W_{i,j}}{\Delta \tau} - \frac{W_{i+1,j} - W_{i-1,j}}{2\Delta x} \right)^2, \quad i = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Correttori

$$W_{i+1, j+1} - \left[2 + \frac{2(\Delta x)^2}{W_{i, j+1/2} \Delta \tau} \right] W_{i, j+1} + W_{i-1, j+1} =$$

$$= \frac{2(\Delta x)}{W_{i,j+1/2}} \left(-\frac{W_{i,j}}{\Delta \tau} - \frac{W_{i+1,j+1/2} - W_{i-1,j+1/2}}{2\Delta x} \right)^2 +$$

$$- (W_{i+1,j} - 2W_{i,j} + W_{i-1,j}), i=1, 2, \dots, p,$$

cui vanno associate le seguenti condizioni iniziali ed al contorno:

- | | |
|----------------------------|--|
| a) $W_{p+1,j} = W_{p-1,j}$ | $\forall j \in I,$ |
| b) $W_{0,j} = W_{2p,j=0}$ | $\forall j \in I,$ |
| c) $W_{i,0}$ noto | $\forall i \in \{0, 1, 2, \dots, p\}.$ |

Le formule risolutive finora citate presuppongono tutte la condizione iniziale $h(0, t) = h(2L, t) = 0$, con $t \geq 0$, la quale ipotizza sopra i dreni un istantaneo abbassamento della falda dalla posizione $h(0, 0)$ per $t \leq 0$ a quella coincidente con la quota del dreno per $t > 0$, ipotesi manifestamente lontana dalla realtà come facilmente riscontrabile per via sperimentale.

A tal proposito nella presente nota vengono messi a confronto i valori dell'abbassamento del pelo libero della falda misurati dopo eventi di precipitazioni notevoli con quelli relativi ai medesimi eventi ma calcolati mediante la (2') ed il procedimento "predictor-corrector".

2. PROVE SPERIMENTALI

Nel campo sperimentale di Ponte della Pietra, annesso all'Istituto di Idraulica Agraria di Perugia, si è iniziata da oltre un decennio una sperimentazione sul drenaggio. Si è dapprima realizzato un impianto di drenaggio con dreni di diametro ad interasse diverso (fig. 2) con pendenza pari al 3%, posti alla profondità di circa 1-1,5 m sotto il piano di campagna. Il campo drenato è stato preventivamente livellato in modo da poterlo assimilare ad un piano orizzontale. Inoltre lungo il perimetro esterno del campo stesso è stata ricavata una piccola trincea per isolarlo dal deflusso superficiale dei terreni circostanti. I dreni sfociano in un canale a sezione trapezia che convoglia le acque in una vasca, più profonda del canale, munita di un sistema di pompaggio. Questo permette di prosciugare in brevissimo tempo la vasca, e quindi il canale, in modo tale da attivare il drenaggio. Tra due dreni sono stati installati

quattro piezometri (fig. 2) dotati di un sistema di registrazione automatico per rilevare l'abbassamento della falda nel tempo.

Al fine di confrontare i risultati sperimentali con quelli dedotti dai procedimenti descritti si è dovuto valutare preliminarmente il valore della permeabilità k , della porosità s effettiva e la profondità d del piano impermeabile.

Tre serie di venticinque misure, effettuate ognuna in cinque diversi pozzi con tre diversi metodi ("Auger hole", "piezometer" e "tube") hanno fornito risultati che, elaborati con le usuali tecniche statistiche, hanno indicato per k una fascia di confidenza al 95% compresa tra 0,3 e 0,5. 10^{-3} cm/s.

Quindici prove di laboratorio su campioni di terreno prelevati nella zona drenata hanno dato per s valori variabili in un piccolo intorno di 0,08.

Cinque sondaggi effettuati nella zona in esame hanno mostrato che il terreno degli strati più superficiali può classificarsi come sabbioso-argilloso di medio impasto, mentre per strati poco più profondi diviene marcatamente argilloso. Si è ritenuto quindi lecito assumere coincidenti la profondità del piano impermeabile e la profondità dell'asse dei dreni rispetto al piano di campagna ($d = 0$).

Per misurare le variazioni delle altezze piezometriche durante il tempo di esaurimento della falda sono state effettuate dieci prove corrispondenti a differenti quote della posizione iniziale della falda.

A causa delle difficoltà insite nell'esecuzione di ciascun esperimento non tutti i risultati raccolti si sono considerati validi per essere elaborati. I dati relativi alle tre differenti condizioni iniziali $h = 0,30, 0,71, 0,97$ m sono rappresentati graficamente nella fig. 3, dove sono disegnati i profili della superficie della falda ad intervalli di 6 ore. I dati relativi alla mezzeria sono stati desunti mediante misure di livello effettuate a intervalli di tempo regolare all'interno di un ulteriore piezometro non dotato di un sistema di registrazione automatico. Tali dati, nella maggioranza dei casi, non si discostano da quelli desunti dalle registrazioni del piezometro n. 3. Misure di livello sono state effettuate su due altri piezometri situati oltre la mezzeria per controllare la simmetria del fenomeno.

Per ciascuna prova si è considerata una durata complessiva di due giorni, perché trascorso questo periodo il movimento diveniva difficilmente apprezzabile e perché la quota del pelo libero nei piezometri si era già abbassata notevolmente rispetto alla posizione iniziale. Una prima elaborazione è consistita nel confrontare i risultati sperimentali di

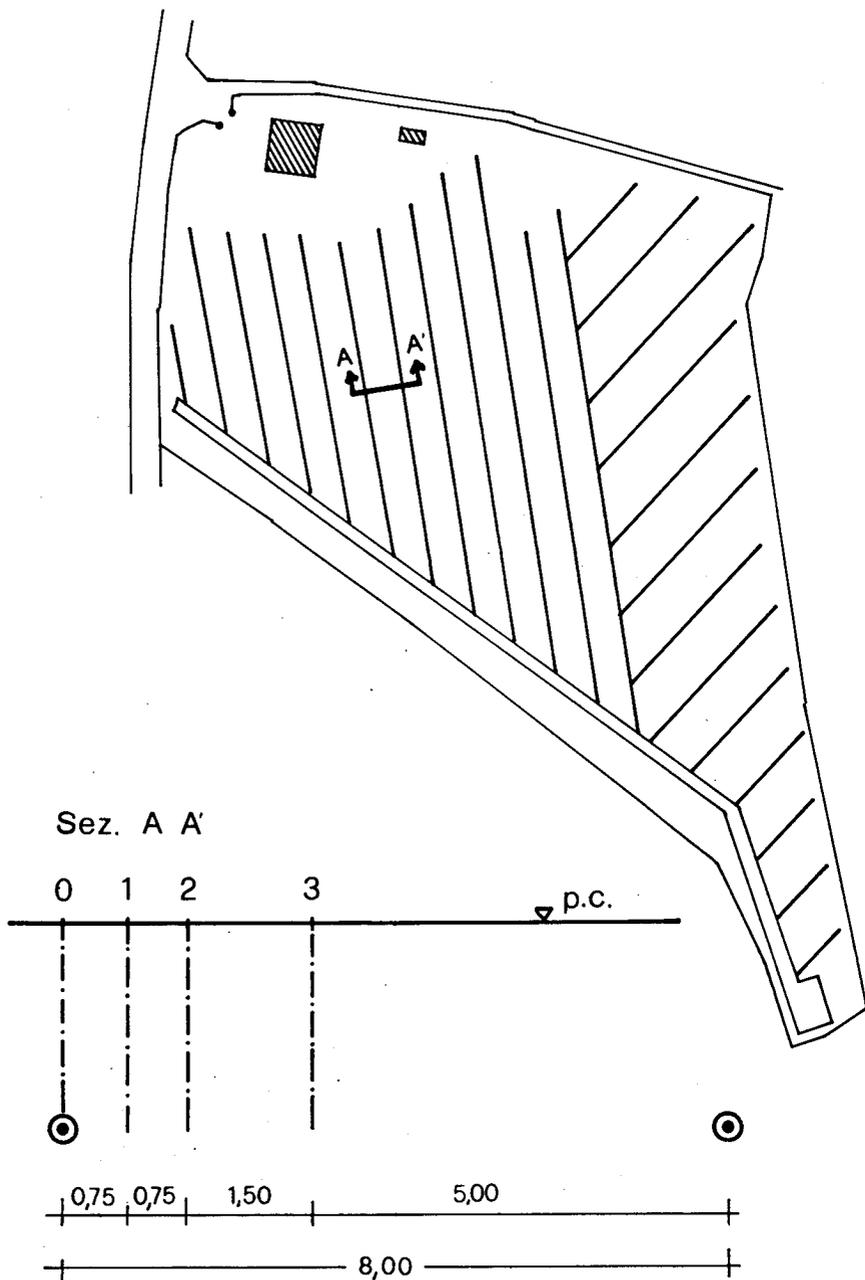


Fig. 2 — Planimetria dell'impianto di drenaggio nel Campo Sperimentale di Ponte della Pietra con indicazione di quattro piezometri (0, 1, 2, 3) a registrazione automatica fra due dreni.

— Network of tubular drains at the experimental Station of Ponte alla Pietra with indication of four automatic piezometers between the drains.

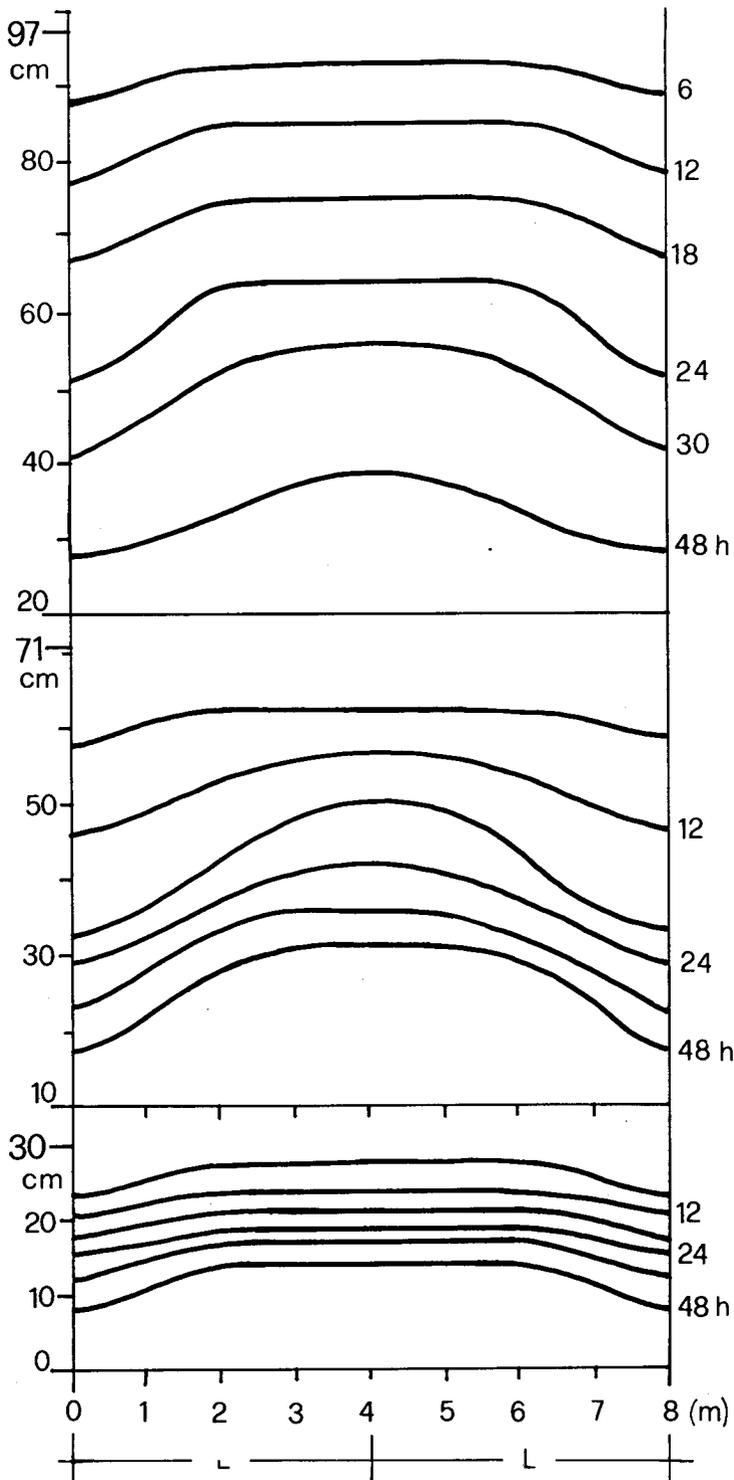


Fig. 3 — Esaurimento della falda nel tempo (dati sperimentali) per le tre condizioni iniziali $h_0(x) = 0,97, 0,71, 0,30$ m.
 — Curves of observed falling water table for different initial conditions.

esaurimento della falda con quelli dedotti introducendo nella (2') e nella (1) risulta con il metodo "predictor-corrector" i valori $s = 0,08$ e $k = 0,3, 0,4, 0,5 \cdot 10^{-3}$ cm/s.

Nella fig. 4 viene graficamente rappresentato il confronto fra i dati sperimentali di esaurimento e quelli calcolati nel tempo con la (2') per le tre differenti condizioni iniziali $h(x) = 0,97, 0,71, 0,30$ m e per i tre piezometri 1, 2, 3.

Nella fig. 5 viene rappresentato analogo confronto fra i dati sperimentali e quelli ottenuti risolvendo la (1) con il procedimento numerico "predictor-corrector". Da tali confronti si può intanto desumere che la (1) ha fornito, in linea generale, valori di quota della superficie della falda più vicini a quelli misurati sperimentalmente, anche se si perviene a sottostime durante la fase iniziale di esaurimento in prossimità dei dreni (piezometro 1). Tali sottostime si attenuano passando ai piezometri più vicini alla mezzeria fino a pervenire, in qualche caso, a sovrastime.

Di contro l'applicazione della (2') conduce a sottostime nella fase iniziale (più marcate per il piezometro 1) ed a sovrastime nella fase finale (più marcate per i piezometri 2 e 3).

La discordanza piuttosto netta rilevata nella prossimità dei dreni dipende evidentemente dal fatto che in entrambi i casi si è considerata come condizione al contorno un istantaneo abbassamento della falda dalla posizione $h(0,0)$ per $t \leq 0$ a quella coincidente con la quota del dreno per $t > 0$.

Per tentare di fornire una misura dell'errore introdotto con la suddeta condizione al contorno si è costruita una funzione:

$$H(0, \tau) = z(u, v) \quad u = \tau, \quad v = H(X, 0) = \frac{h_0(x)}{L}$$

che descrive l'abbassamento della falda in corrispondenza del dreno in funzione sia della posizione iniziale della falda stessa sia del tempo. Per avere indicazioni sul tipo di superficie da usare come interpolatrice si sono considerate le curve sezioni della $z = z(u, v)$ con i piani $v_i = \text{cost}$, fornite dai dati sperimentali misurati con il piezometro posto in corrispondenza del dreno. Poiché l'andamento è chiaramente non lineare, le curve suddette si sono ipotizzate di forma parabolica:

$$z(u, v_i) = a_i u^2 + b_i u + c_i \quad i = 1, 2, 3.$$

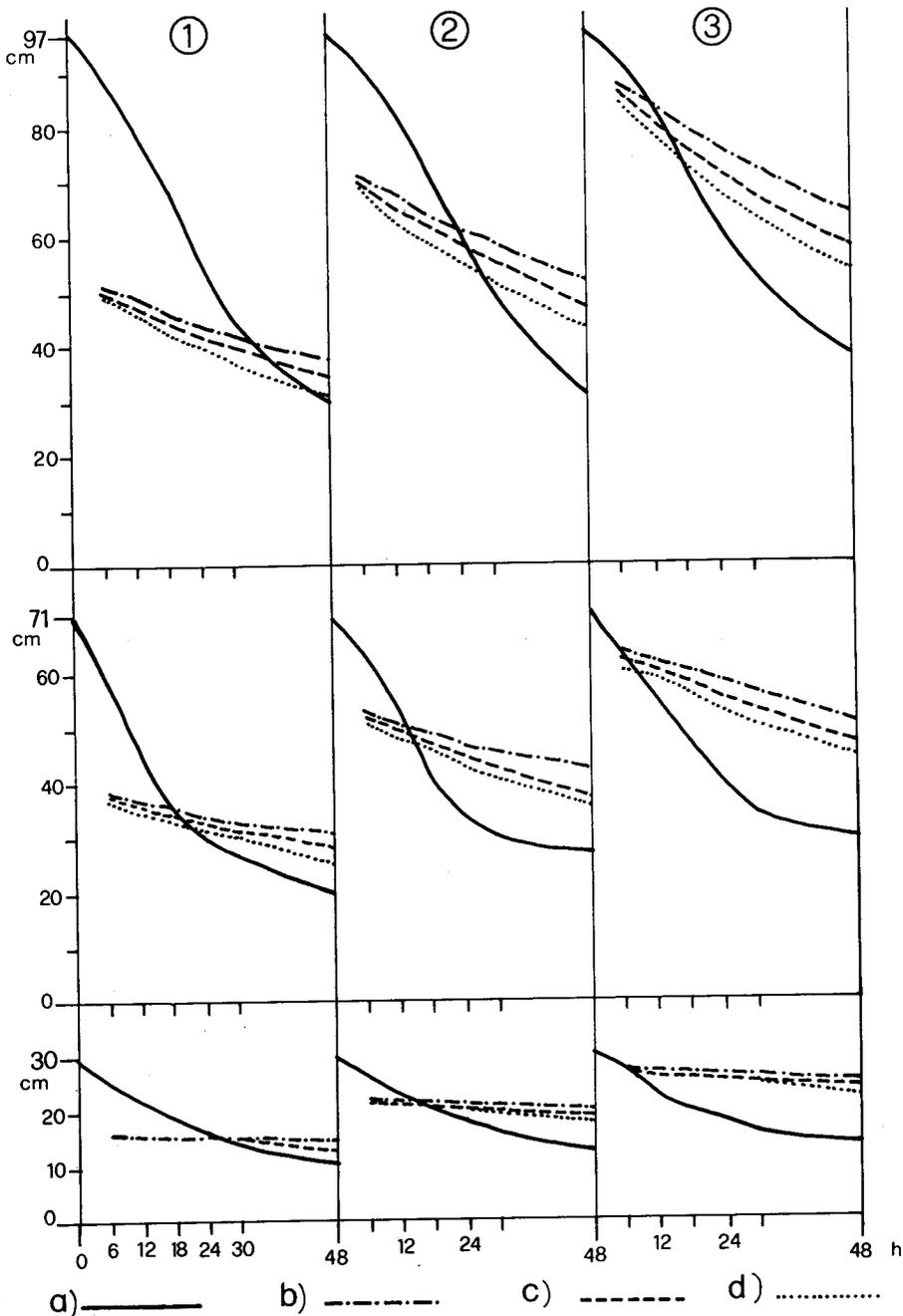


Fig. 4 — Confronto fra i dati sperimentali (a) e quelli calcolari utilizzando il grafico della Polubarinova Kotchina per $k=0,3 \cdot 10^{-3}$ cm/s (b), $k=0,4 \cdot 10^{-3}$ cm/s (c), $k=0,5 \cdot 10^{-3}$ cm/s (d) di esaurimento della falda nel tempo per i piezometri 1, 2, e 3.

— Comparison between falling water table measured (a) at piezometers 1, 2, 3 (see fig. 2) and the calculated ones from Polubarinova Kotchina for $k=0,3 \cdot 10^{-3}$ cm/s (b), $k=0,4 \cdot 10^{-3}$ cm/s (c), $k=0,5 \cdot 10^{-3}$ cm/s (d).

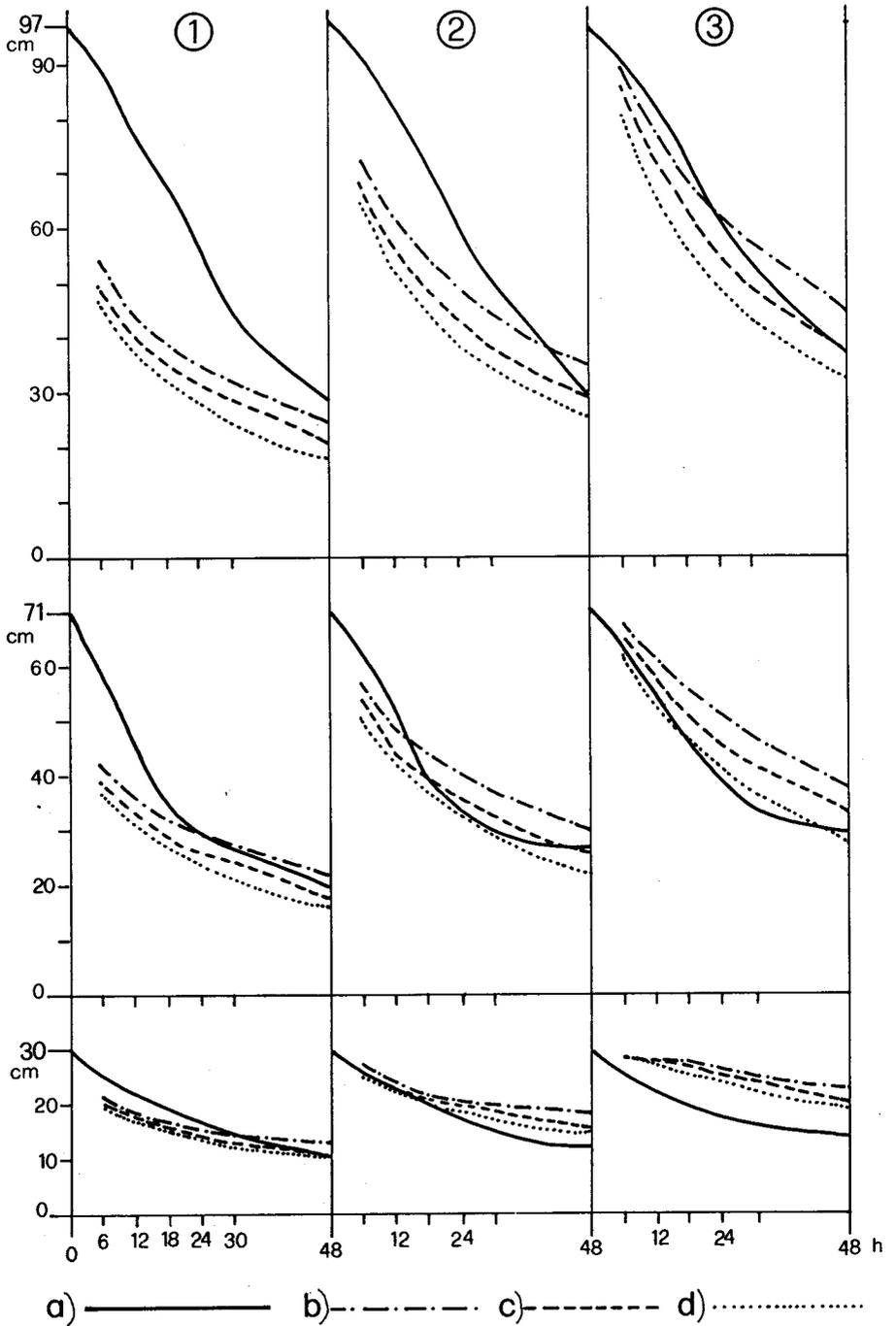


Fig. 5 — Confronto fra i dati sperimentali (a) e quelli calcolati secondo il metodo predictor-corrector per $k=0,3 \cdot 10^{-3}$ cm/s (b), $k = 0,4 \cdot 10^{-3}$ cm/s (c), $k = 0,5 \cdot 10^{-3}$ cm/s (d).

— Comparison between falling water table measured (a) at the piezometers 1, 2, 3 (see fig. 2) and the calculated ones by predictor-corrector method for $k=0,3 \cdot 10^{-3}$ cm/s (b), $k=0,4 \cdot 10^{-3}$ cm/s (c), $k=0,5 \cdot 10^{-3}$ cm/s (d).

Supposto di scegliere come condizione ottimale quella che rende minima la somma dei quadrati delle differenze tra i valori teorici e valori osservati, si sono ottenute tre parabole corrispondenti alle tre differenti condizioni iniziali esaminate:

$$z(u, v) = \begin{aligned} & 0,00283 u^2 - 0,02556 u + 0,83956 \\ & 0,02214 u^2 - 0,11028 u + 0,17674 \\ & 0,01757 u^2 - 0,12144 u + 0,26300 \end{aligned} \quad (3)$$

I coefficienti a_i , b_i e c_i che ovviamente nella (3) sono costanti mostrano avere una dipendenza funzionale con l'altra variabile v . Tale dipendenza si può supporre lineare per c_i , mentre per a_i e b_i l'ipotesi di linearità non sembra essere accettabile. Una attenta osservazione della (3) conduce quindi ad ipotizzare per a_i e b_i un andamento parabolico in funzione di v e perciò si può ragionevolmente supporre che la $z(u, v)$ sia un polinomio razionale intero il cui grado sarà il minimo possibile compatibilmente con l'approssimazione desiderata e cioè:

$$z(u, v) = (\alpha_1 v^2 + \beta_1 v + \gamma_1) u^2 + (\alpha_2 v^2 + \beta_2 v + \gamma_2) u + \beta_3 v + \gamma_3 \quad (4)$$

Applicando nuovamente il metodo dei minimi quadrati all'andamento (4) della $z(u, v)$ per i 18 dati sperimentali tratti delle prove, si raggiunge l'espressione:

$$z(u, v) = (-0,0581 v^2 - 0,0459 v - 0,0321) u^2 + (26,2144 v^2 + 7,4453 v + 0,3582) u + 1,1524 v - 0,0207 \quad (5)$$

In fig. 6 sono stati posti a confronto i risultati sperimentali $H(0, \tau)$ e quelli $\hat{H}(0, \tau)$ dedotti dalla (9): come si può osservare l'accostamento tra i dati misurati e quelli calcolati si è rivelato molto soddisfacente.

Inoltre le misure ottenute con un'ulteriore prova, non utilizzata per ricavare la (5), per $H_0 = 0,8$, confrontati con quelli dedotti dalla (5), ne hanno confermato la bontà.

La (5) può essere utilizzata come condizione al contorno nel procedimento numerico "predictor-corrector" al posto della $H(0, \tau) = 0$ per $\tau > 0$.

Una ulteriore applicazione con condizione iniziale $H_0 = 0,8$ m ha fornito accostamenti migliori fra dati sperimentali e quelli dedotti dal modello ed in particolare sembra che fra i valori di k utilizzati sia da preferire il più alto ($k = 0,5 \cdot 10^{-3}$ cm/s).

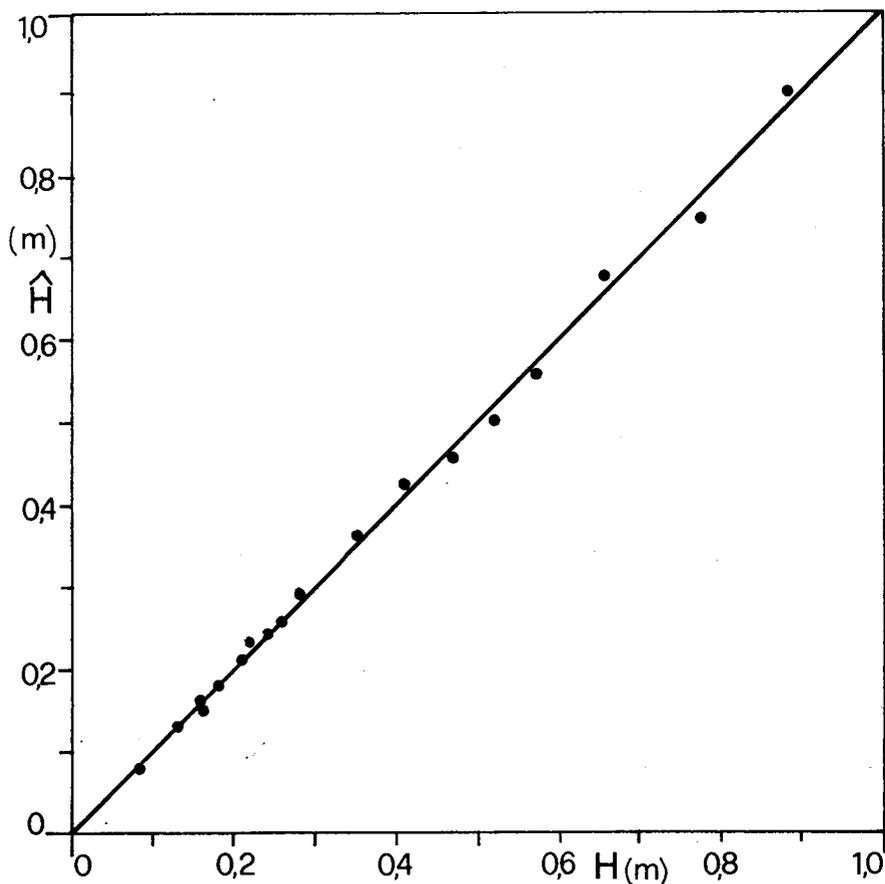


Fig. 6 — Confronto fra i dati sperimentali della quota della falda su dreno $H(0,\tau)$ e quelli calcolati $\hat{H}(0,\tau)$ secondo la (5).

— Comparison between measured and calculated values of water level over the drains.

Il modello matematico fornisce inoltre un esaurimento della falda più lento rispetto a quelle reale, circostanza a vantaggio della sicurezza anche se fonte di aggravio per le spese di impianto.

Ulteriori applicazioni dovranno confermare i buoni risultati di questa prima che sembra suggerire una preferenza per il metodo "predictor-corrector" con la condizione al contorno precedentemente trovata.

SOMMARIO

ESAURIMENTO DI FALDE DRENATE:
PROVE SPERIMENTALI E RISULTATI NUMERICI

Dopo aver illustrato alcuni metodi risolutivi dell'equazione differenziale che governa l'esaurimento di una falda con le relative condizioni iniziali ed al contorno, si è passati alla loro applicazione per calcolare l'abbassamento del pelo libero della falda dopo eventi di precipitazioni notevoli relative al Campo sperimentale di Ponte della Pietra annesso all'Istituto di Idraulica Agraria dell'Università di Perugia. Un confronto fra i dati calcolati e quelli misurati sperimentalmente ha mostrato alcune divergenze che, almeno in prossimità dei dreni, sembrano dipendere dalla condizione iniziale normalmente accettata che ipotizza sopra i dreni un istantaneo abbassamento della falda dalla reale posizione iniziale a quella coincidente con la quota del dreno per i successivi tempi. Tale ipotesi è manifestamente lontana dalla realtà per cui si suggerisce di applicare come condizione un abbassamento che segue nel tempo un andamento parabolico dipendente anche dalle reali condizioni iniziali di quota della superficie di falda.

SUMMARY

FALLING WATER TABLE BY TUBULAR DRAINS:
QUANTITATIVE DISCUSSIONS OF SOME EXPERIMENTAL RESULTS

In the present work we have applied the differential equation that governs the groundwater exhaustion in order to calculate the falling water table after significant rainfalls at the experimental station of Ponte della Pietra (University of Perugia). A comparison between the calculated and measured data has shown that the values near the drains are not in good agreement. This is probably caused by the initial condition usually accepted; in fact it consists in the hypothesis of an instantaneous falling over the drains of the water table, from the initial position to the level of drains. This hypothesis is clearly a long way off the real situation. Therefore we suggest, as a boundary condition, a parabolic water table falling-time law.

ÉPUISEMENT D'UNE NAPPE DRAINÉE: EXPÉRIENCES ET RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Après avoir illustré quelques méthodes permettant de résoudre l'équation différentielle qui représente l'épuisement d'une nappe drainée avec ses conditions initiales et au contour on est passé à leur application pour déterminer la chute de la surface de la nappe après des averses sur le Champ d'expériences à Ponte della Pira de l'Institut d'Hydraulique Agricole de l'Université de Pérouse. Une comparaison parmi les données calculées et mesurées a montré quelques divergences qui au moins près les drains on dirait dépendre de la condition initiale, normalement acceptée, qui suppose, sur les drains, une chute immédiate de la nappe à partir de la réelle position initiale jusque à celle du niveau du drain pour les temps suivants. Cette hypothèse n'est pas manifestement réelle et donc on propose de considérer comme condition une chute qui a un développement parabolique, fonction du temps et du réel niveau initial de la nappe.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BEAR J. — *Dinamics of fluids in porous media*. America Elsevier, 1972.
- [2] CARNAHAN B., LUTHER M. A., WILKES J. O. — *Applied numerical methods*. John Wiley e Sons, inc. New York, 1969.
- [3] CARRAVETTA R. — *Sull'esaurimento di falde freatiche mediante drenaggio*. Istituto Idraulica Agraria, Portici 1961.
- [4] CARRAVETTA R. — Efficienza di sistemi di drenaggio in relazione alla loro posizione nel campo filtrante. *Istituto di studi e ricerche in materia di Ingegneria agraria*. Pubbl. n. 11, 1963.
- [5] DEGAN G. — Spacing of drains by an approximate method. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*, 90, No. IRI 41-46, 1964.
- [6] DUMM L. D. — Subsurface drainage by transient-flow theory. *Journal of the Irrigation and Drainage Division, ASCE*, 94, No. IR4 505-519, 1968.
- [7] LUTHIN J. N. — *Drainage Engineering*. John Wiley e Sons, New York 1966.
- [8] POLUBARINOVA-KOTCHINA P. Y. A. — *Theory of ground-water movements*. Princeton University Press, 1962.
- [9] REMSON J., HORNERHERG G. M., MOLZ F. J. — *Numerical methods in subsurface hydrology*. Wiley-Interscience, 1971.
- [10] STOPPINI Z. — Sul drenaggio tubolare dei terreni. *Atti IX Conv. Idraulica e Costr. Idrauliche*, Trieste 1965.

- [11] STOPPINI Z. — Alcune considerazioni attuali sulle profondità e sulla distanza più conveniente dei dreni campestri. *Atti X Con. Idraulica e Costr. Idrauliche*, Cagliari 1967.
- [12] UBERTINI L., CECCONI G. — Il metodo numerico predictor-corrector applicato allo studio dell'esaurimento di falde drenate. *Ann. Fac. Agraria, Univ. Perugia*, XXIV, 200-216, 1974.
- [13] VAN SCHILFGAARDE J. — Theory of flow to drains. *Advances in Hydroscience* (6), Academic Press, New York 1970.
- [14] VELATTÀ M. — *Nuovo contributo all'indagine sul comportamento idraulico dei drenaggi o fognature campestri nella fase di avviamento*. Succ. Penada, Padova 1950.